Imagerie à haute résolution sous contraintes

Pierre Minier[1], Jean-François Giovannelli[1] et François Orieux[2]

[1]IMS (Univ. Bordeaux – CNRS – BINP) et [2]L2S (Univ. Paris-Saclay – CNRS – CentraleSupélec)

Thèse débutée en octobre 2023

Introduction

Dans de nombreux domaines, de la médecine à l'astronomie, on cherche à reconstruire des phénomènes à partir de données incomplètes et bruitées. Une approche classique consiste à adopter un cadre bayésien : combiner les observations avec des connaissances *a priori* (contraintes physiques, structurelles, etc.) afin d'obtenir une distribution de probabilité *a posteriori* qui résume toute l'information disponible.
L'échantillonnage est une méthode pour obtenir cette distribution. On fabrique de nombreux exemples qui respectent la loi *a posteriori*. Cela permet :

- **l'amélioration de résolution**, car les tirages révèlent les structures les plus probables sous-jacentes aux observations ;
- **la quantification des incertitudes**, car la diversité des échantillons reflète le degré de confiance que l'on peut accorder aux estimations.

En pratique, les difficultés apparaissent à deux niveaux : d'une part, les contraintes imposées aux solutions (par exemple la positivité des valeurs) limitent fortement l'espace des configurations possibles ; d'autre part, la très grande dimension du problème complique encore les calculs, puisqu'il faut représenter chaque pixel de l'image par une variable distincte et corrélée aux autres.

Comment développer des méthodes efficaces pour échantillonner sous contraintes en grande dimension,
afin de mieux reconstruire les objets et d'estimer les incertitudes associées ?

Matériel et méthodes

Modèles

- observation :

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

  - $\boldsymbol{y}$ observation réalisée
  - $\boldsymbol{x}$ la vraie image
  - $\boldsymbol{H}$ instrument de mesure
  - $\boldsymbol{\varepsilon}$ un bruit aléatoire

- image :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$$

  - $\boldsymbol{A}$ modélise la corrélation
  - $\boldsymbol{u}$ image sans corrélation

Contraintes

- Positivité : $\boldsymbol{x} \geq 0$
- Contrôle de la corrélation : grâce à $\boldsymbol{A}$
- Modèle explicite pour l'estimation des hyper-paramètres $\boldsymbol{\theta}$ (niveau de bruit $\boldsymbol{\varepsilon}$, niveau de corrélation de $\boldsymbol{A}$, moyenne et amplitude de $\boldsymbol{u}$)

Formule de Bayes

On cherche à estimer la vraie image $\boldsymbol{x}$ en même temps que les hyper-paramètres $\boldsymbol{\theta}$ sachant l'observation $\boldsymbol{y}$ et la statistique du bruit $\boldsymbol{\varepsilon}$.

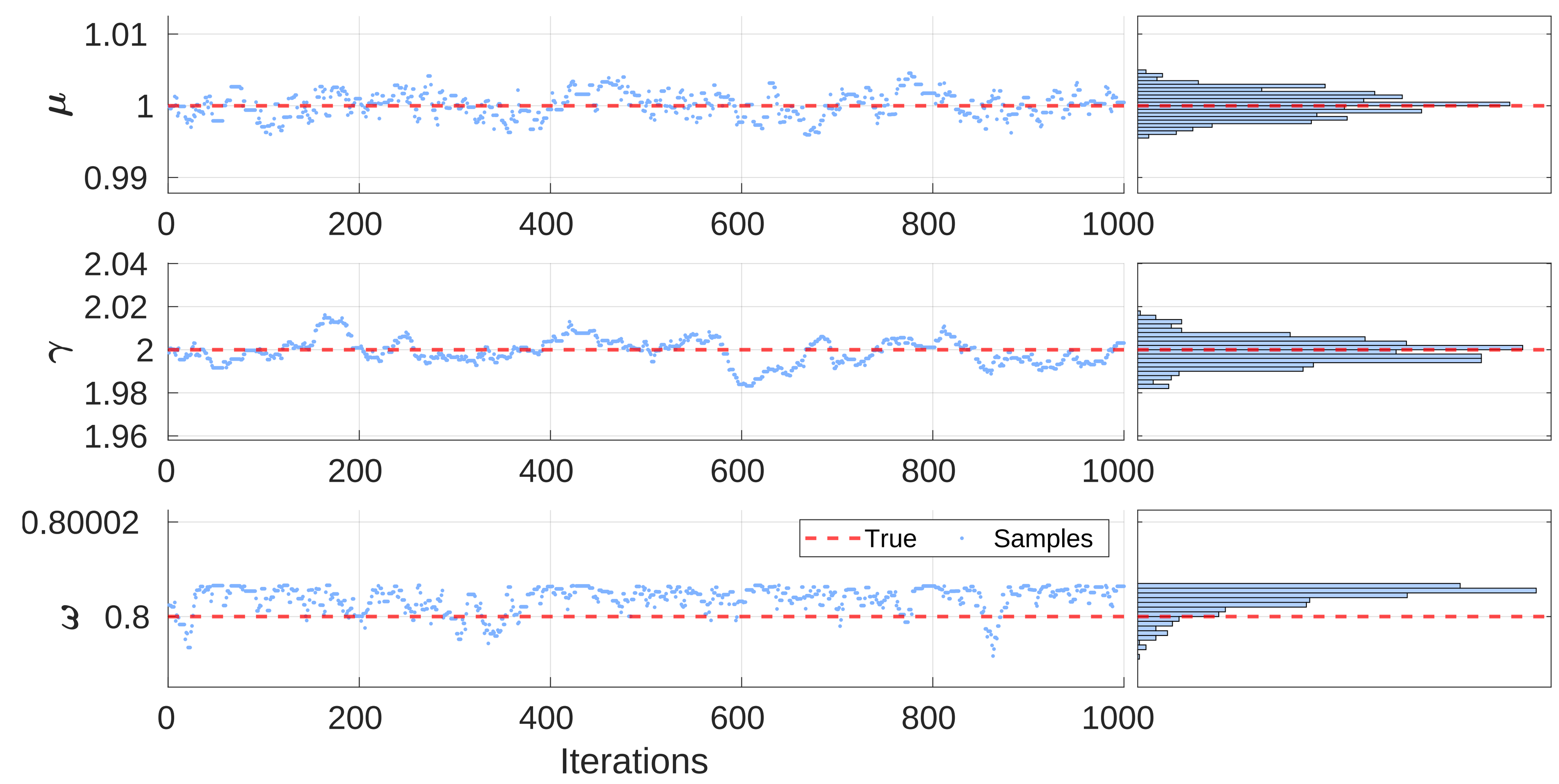
$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}) = \frac{p(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})\, p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})}{p(\boldsymbol{y})}$$

Échantillonnage Monte-Carlo par Chaîne de Markov (MCMC)

- Séquence de variables aléatoires où chaque futur état dépend seulement du précédent.
- La chaîne est étudiée pour converger vers la distribution d'intérêt $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y})$ et produire des échantillons que l'on pourra étudier (moyenne, écart-type, forme de la distribution).
- En pratique, différents types d'algorithme sont possibles (Metropolis-Hastings, Gibbs, Langevin, Hamiltonien).

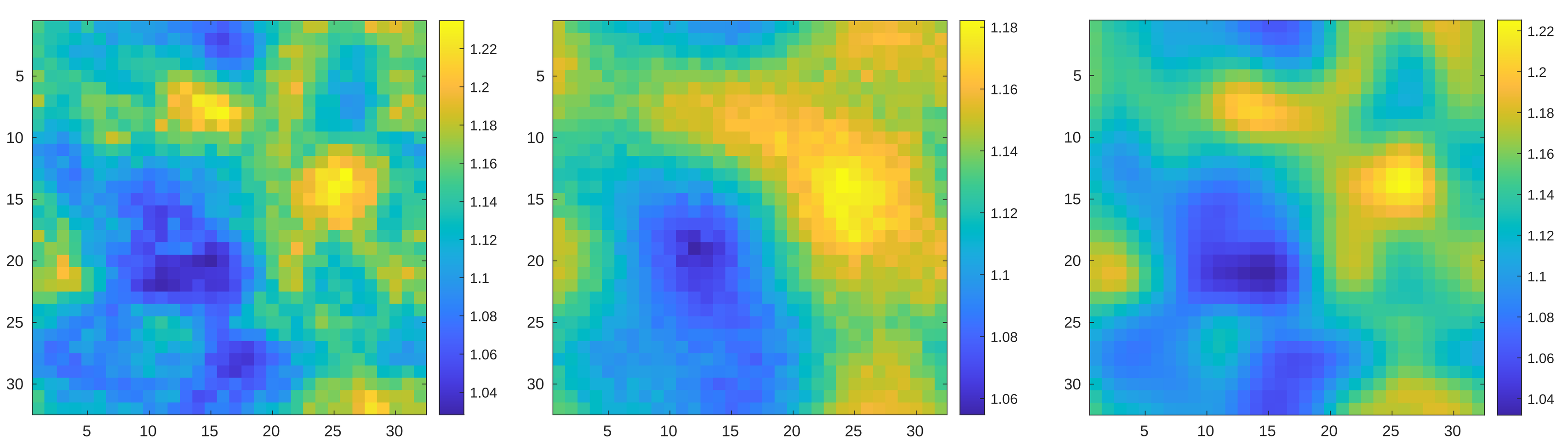
Résultats et perspectives

Estimation des hyper-paramètres du modèle image

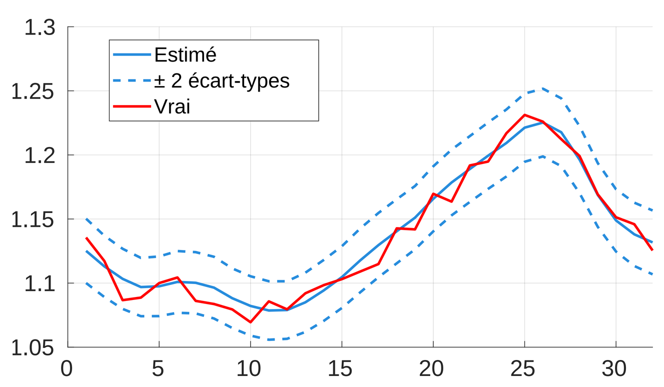


Issu de la publication *A Probabilistic Model for Image Processing with Positivity Constraint and Spectral Density Control, IEEE SSP 2025 Workshop.*

Estimation de l'image sur données synthétiques



Vrai objet $\boldsymbol{x}$ (inconnu) — Observation $\boldsymbol{y}$ (connu) — Estimé $\hat{\boldsymbol{x}}$



Incertitudes sur la ligne 14

Travaux en cours sur une méthode Gibbs.

- Les deux sources jaunes sont bien séparées.
- Les contours des régions sont restaurés.
- Les niveaux d'intensité sont retrouvés.
- Accès aux incertitudes de chaque pixels.

Ce travail est également soutenu par le PEPR et le RRI ORIGINS.

Conclusion

Répondre à notre problématique passe par la construction d'un modèle image *a priori* $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$ intégrant directement les contraintes. Cet *a priori* est combiné à la vraisemblance des inconnues $p(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$ via la formule de Bayes, afin d'obtenir une densité *a posteriori* à partir de laquelle on échantillonne. Cette approche fournit des résultats significatifs, comme le montre le test sur données synthétiques. La perspective est d'aboutir à une méthode entièrement auto-supervisée, où les hyper-paramètres sont estimés conjointement avec l'image, tout en explorant de nouvelles stratégies d'échantillonnage.