

## Application

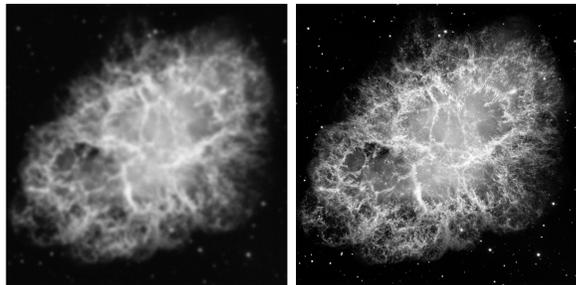


Image floue  $y$

Image nette  $x$

Nébuleuse du Crabbe. Crédit image: NASA, ESA, J. Hester and A. Loll (Arizona State University). Accès via ESA/Hubble, 2005.

Modèle :  
• Convolutif  
• Erreur additive

$$y = Hx + \epsilon$$

## Déconvolution

Reconstituer  $x$  à partir de  $y$  et  $H$  via un traitement automatisé.

## Désidérata

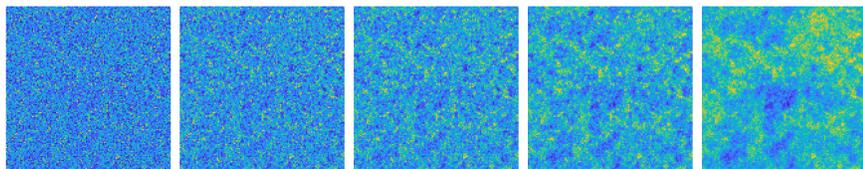
- **Positivité des pixels** : physique du problème (énergie, intensité...).
- **Maîtrise de la DSP** : modélisation des caractéristiques des images.
- **Modèle explicite** : méthodes automatisées, accès aux incertitudes.

## Modélisation probabiliste de l'image $x$

- Champ aléatoire iid gaussien tronqué positif  $u \sim \mathcal{N}_+(\mu_u, \gamma_u I)$ .
- Filtrage à RI positive par une matrice  $x = A_\omega u$ .
- DSP maîtrisée par  $\omega$  calibrant la corrélation entre les pixels.

$$\pi(x | \eta) = |\det A_\omega|^{-1} K(\mu_u, \gamma_u)^P \exp(-\gamma_u \|A_\omega^{-1} x - \mu_u \mathbf{1}\|^2 / 2) \mathbb{1}_+(A_\omega^{-1} x) \quad (1)$$

$$K(\mu_u, \gamma_u) = \sqrt{\frac{\gamma_u}{2\pi}} \times 2 \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{\gamma_u}{2}} \mu_u \right) \right]^{-1} \quad \text{et} \quad \eta = [\mu_u, \gamma_u, \omega]$$



$\omega = 0$     $\omega = 0.25$     $\omega = 0.5$     $\omega = 0.75$     $\omega = 0.99$   
Réalizations de  $x$  avec une corrélation croissante, filtrage AR(1).

## Cadre bayésien

- Observation  $y$  :  $f(y | x, \gamma_e) = (\gamma_e / (2\pi))^{P/2} \exp(-\gamma_e \|y - Hx\|^2 / 2)$
- A priori contraint sur  $x$  :  $\pi(x | \eta)$  décrit par (1)
- A priori uniforme et séparable sur  $\eta$  :  $\pi(\eta) = \pi(\mu_u) \pi(\gamma_u) \pi(\omega)$
- A priori gamma sur  $\gamma_e$  :  $\pi(\gamma_e) = \beta^\alpha \Gamma(\alpha)^{-1} \gamma_e^{\alpha-1} \exp(-\beta \gamma_e) \mathbb{1}_+(\gamma_e)$

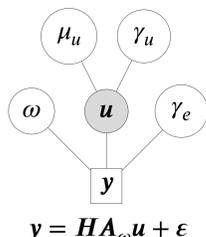
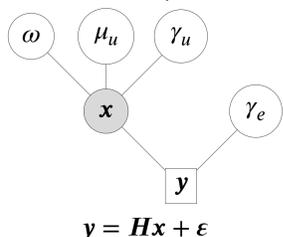
Pour un modèle hiérarchique en  $x$  :

$$\text{Loi jointe : } \pi(x, y, \theta) = f(y | x, \gamma_e) \pi(x | \eta) \pi(\eta) \pi(\gamma_e)$$

$$\text{Posterior : } \pi(x, \theta | y) \propto f(y | x, \gamma_e) \pi(x | \eta) \pi(\eta) \pi(\gamma_e)$$

Avec  $\theta = [\eta, \gamma_e]$  l'ensemble des paramètres.

## Modèles hiérarchiques



## Formulations équivalentes du posterior

$$\pi(\square, \theta | y) \propto Z_\square(\theta) \exp \left[ -\frac{1}{2} (\square - m_\square)^T \Gamma_\square (\square - m_\square) \right] \mathbb{1}_+(\mathbf{K}_\square \square)$$

$\square$	$\Gamma_\square$	$m_\square$	$\mathbf{K}_\square$
$x$	$\gamma_e H^T H + \gamma_u A_\omega^{-T} A_\omega^{-1}$	$\Gamma_x^{-1} (\gamma_e H^T y + \gamma_u \mu_u A_\omega^{-T} \mathbf{1})$	$A_\omega^{-1}$
$u$	$\gamma_e A_\omega^T H^T H A_\omega + \gamma_u I$	$\Gamma_u^{-1} (\gamma_e A_\omega^T H^T y + \gamma_u \mu_u \mathbf{1})$	$I$
$z_x$	$I$	$\Gamma_x^{-0.5} (\gamma_e H^T y + \gamma_u \mu_u A_\omega^{-T} \mathbf{1})$	$A_\omega^{-1} \Gamma_x^{-0.5}$
$z_u$	$I$	$\Gamma_u^{-0.5} (\gamma_e A_\omega^T H^T y + \gamma_u \mu_u \mathbf{1})$	$\Gamma_u^{-0.5}$

avec  $\Gamma_\square^{-0.5}$  tel que  $\Gamma_\square^{-0.5T} \Gamma_\square^{-0.5} = I$

## Densités conditionnelles à partir du posterior

- des paramètres de l'image  $\pi(\eta | *)$  [soumis pour publication à SSP],
- du paramètre de bruit  $\pi(\gamma_e | *)$  qui suit une loi gamma,
- d'un des 2 champs :  $\pi(x | *)$  ou  $\pi(u | *)$ .

Problème : densité multivariée, contraint, et non séparable.

Solution : exprimer la densité d'un pixel du champ.

## Densité du pixel $p$

Densité conditionnelle de la nouvelle image  $\tilde{x}$  :

$$\pi(\tilde{x} | *) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2} (\tilde{x} - m)^T \Gamma (\tilde{x} - m) \right] \mathbb{1}_+(\mathbf{K} \tilde{x})$$

où

$$\tilde{x} = x + (\tilde{x}_p - x_p) \mathbb{1}_p^t = x + \delta_p \mathbb{1}_p^t$$

dépend de la précédente image  $x$  et de l'écart  $\delta_p$  à ajouter au pixel  $x_p$ .

Quantités intermédiaires :

$$c_0 = \Gamma(0, 0) \quad \tau_x = (\Gamma m - \Gamma x) / c_0 \quad (2) \quad \kappa_x = \mathbf{K}x. \quad (3)$$

Gaussienne tronquée scalaire :

$$\delta_p \sim \mathcal{N}_{(m_p, M_p)}(\mathbb{1}_p^t \tau_x, c_0) \quad (4)$$

avec seulement 1 ou 2 inégalités en considérant les plus contraignantes

$$m_p = \begin{cases} - \left( \max_{n \in \mathbb{N}_p} \frac{\mathbb{1}_n^t \mathbf{K} \mathbb{1}_p}{\mathbb{1}_n^t \kappa_x} \right)^{-1} & \text{si } \exists n \in \mathbb{N}_p \quad \mathbb{1}_n^t \mathbf{K} \mathbb{1}_p > 0, \\ -\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5)$$

$$M_p = \begin{cases} - \left( \min_{n \in \mathbb{N}_p} \frac{\mathbb{1}_n^t \mathbf{K} \mathbb{1}_p}{\mathbb{1}_n^t \kappa_x} \right)^{-1} & \text{si } \exists n \in \mathbb{N}_p \quad \mathbb{1}_n^t \mathbf{K} \mathbb{1}_p < 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mise à jour des quantités intermédiaires

$$\kappa_{\tilde{x}} = \kappa_x + \delta_p \mathbf{K} \mathbb{1}_p \quad (6) \quad \tau_{\tilde{x}} = \tau_x - \frac{\delta_p}{c_0} \Gamma \mathbb{1}_p. \quad (7)$$

## Pseudo-code pour une déconvolution par échantillonnage

Pour  $t = 1, 2, \dots$  :

# Échantillonnage paramètres

Échantillonner une proposition  $\theta^p$  selon  $\mathcal{N}(\theta_{t-1}, \sigma^2 I)$ .

Calculer  $\alpha = \exp[LP(\theta^p) - LP(\theta_{t-1})]$  où  $LP(\theta) = \log \pi(\theta | *)$ .

Accepter avec une probabilité  $\alpha$  la proposition :  $\theta_t = \theta^p$ .

Si refusé, dupliquer l'échantillon précédent :  $\theta_t = \theta_{t-1}$ .

# Échantillonnage  $\gamma_e$

Échantillonner  $\gamma_e$  selon une distribution Gamma  $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$ .

# Échantillonnage pixels

Calculer  $\tau_x$  et  $\kappa_x$  selon (2) et (3) par FFT circulante.

Pour chaque pixel  $p$  :

Calculer  $m_p$  et  $M_p$  selon (5).

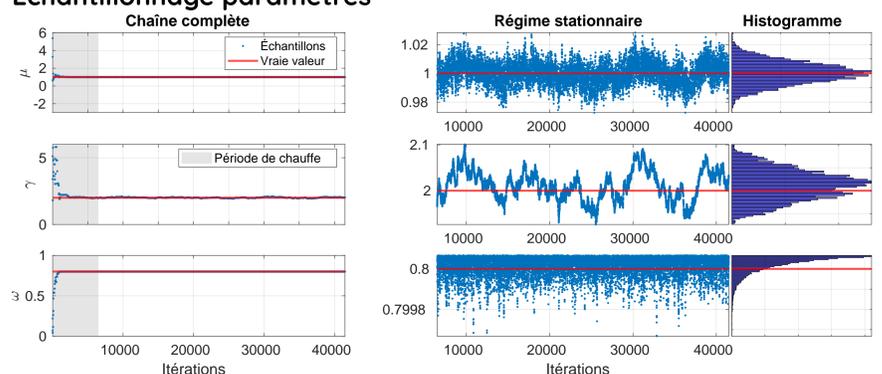
Tirer  $\delta_p$  selon (4).

Remplacer le pixel  $p$  avec  $\tilde{x}_p = x_p + \delta_p$ .

Mettre à jour  $\kappa_x$  et  $\tau_x$  selon (6) et (7).

Fin

## Échantillonnage paramètres



## Perspectives

- Tester les différentes possibilités selon les spécificités des champs.
- Alternatives : optimisation pixel par pixel ou globalement (ADMM).
- Identifier si ces méthodes sont équivalentes ou non.
- Modèle à labels pour garantir une masse de pixels nuls (fond astro).

## Bibliographie

- V. Mazet, D. Brie, and J. Idier, "Simulation of positive normal variables using several proposal distributions," IEEE SSP, Juillet 2005, pp. 37-42
- N. Chopin, "Fast simulation of truncated gaussian distributions," Statistics and Computing, vol.21, no.2, p.275-288, Jan. 2010